# Produkte

$X_1, \dots, X_n$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \\ \prod_{i=1}^n X_i \end{array}\right\} := \{(x_1, \dots, x_n) \mid \forall i: \ x_i \in X_i\}$$

geordnetes n-Tupel

$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$

$\iff$ $x_i = y_i$ für alle $i$

$$X^n := \underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ Faktoren}}$$

$$X^0 = \prod_{\emptyset} := \{*\} \quad \text{(1-elementige Menge)}$$

$X_i$ Mengen $(i \in I)$

$$\prod_{i \in I} X_i := \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i \in X_i \ \forall i \in I\}$$

**Def (2.1.6):** Für $j \in I$ ist die <u>Projektion auf die j-te Komponente</u>

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$$
$$(x_i)_{i \in I} \longmapsto x_j$$

**Notiz (2.1.6)** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir eine kanonische Bijektion

$$\mathrm{Abb}(\{1,\dots,n\}, X) \longrightarrow X^n$$

Menge aller Abbildungen $\{1,\dots,n\} \longrightarrow X$

**Def (2.1.8):** Der <u>Graph</u> einer Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

$$\left(= \{(x, f(x))\}\right)$$

**Def (2.1.8):** Eine <u>Relation</u> auf einer Menge $X$ ist eine Teilmenge

$$R \subset X \times X.$$

Notation: $x \sim y \;:\Longleftrightarrow\; (x,y) \in R$

$x \sim_R y$

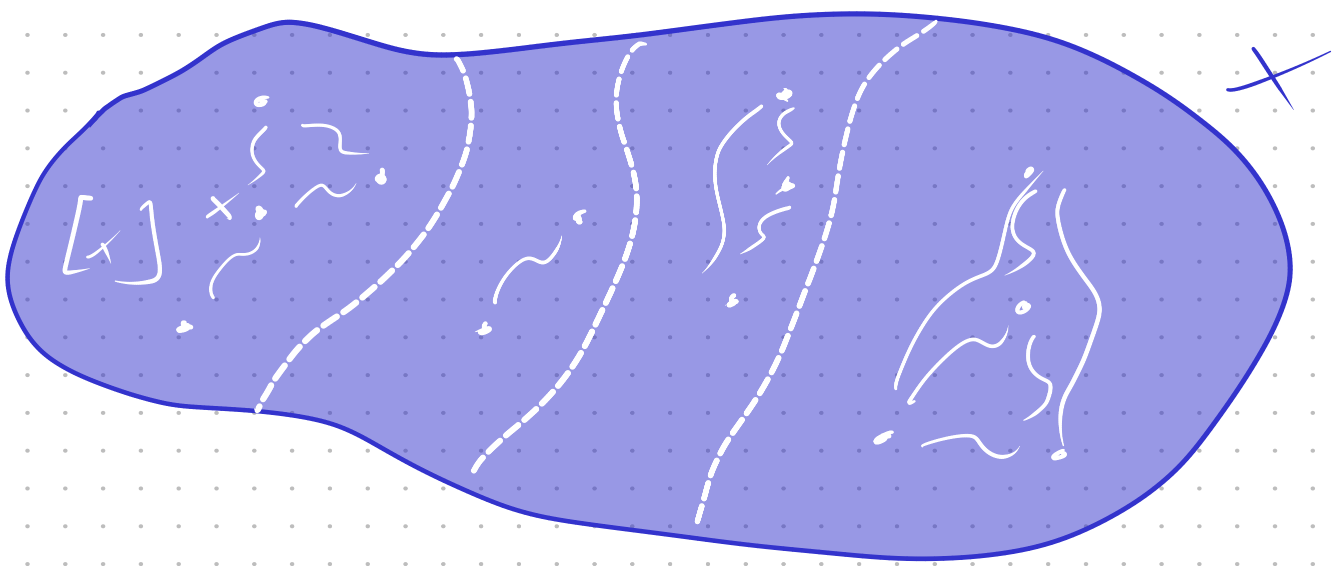
Eine <u>Äquivalenzrelation</u> ist eine Relation mit den folgenden Eigenschaften:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(Reflexivität)} & x \sim x \\ \text{(Symmetrie)} & x \sim y \iff y \sim x \\ \text{(Transitivität)} & x \sim y \text{ und } y \sim z \\ & \implies x \sim z \end{array}\right\} \forall x,y,z \in X$$

<u>Def (2.1.8):</u> Sei $R$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Die <u>Äquivalenzklasse</u> eines Elements $x \in X$ ist die Teilmenge

$$[x] := \{ y \in X \mid y \sim_R x \}$$

<u>Notiz (2.1.9)</u> Für zwei Äquivalenzklassen $[x]$ und $[y]$ gilt:
$[x] \cap [y] = \emptyset$ oder $[x] = [y]$.



Insbesondere liegt jedes $x \in X$ in genau einer Äquivalenzklasse.

<u>Def (2.1.8)</u> Die Menge der Äquivalenzklassen

$$X/\sim_R := \{ [x] \mid x \in X \}$$

heißt <u>Quotientenmenge</u> von $X$ nach der Relation $R$ und die kanonische Abb.

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X/\sim_R \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

heißt <u>Quotientenabb.</u>